

$$V(T) = E T^2 - (E T)^2 = 0$$

٢٣

$$f_T(t) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{2\pi} \Gamma(\frac{n}{2})} (1 + \frac{t^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}, \quad t \in \mathbb{R}$$

وفي الحالة الخاصة إذا كان $n=1$

$$f_T(t) = \frac{1}{\pi} (1 + t^2)^{-1} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+t^2}, \quad t \in \mathbb{R}$$

هو توزيع كوشي للوسيطين $n=1$ و $d=0$

- والآن لنوجد سبل من التوقع والتباين لهذا المتغير

$$E T = \int_{-\infty}^{\infty} t f_T(t) dt = 0$$

التوقع الرباعي لتوزيع دافن $= 0$ لأن حدود التكامل

متناظرة والدالة المتكاملة هي دالة فردية

$$\left[\frac{t}{\sqrt{x}} \right] T = \frac{x}{\sqrt{x}} \sim t(n) \Rightarrow T = \frac{\sqrt{n} x}{\sqrt{x}} \Rightarrow E T = \sqrt{n} E \left(\frac{x}{\sqrt{x}} \right) E \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

$$E T = 0 \Rightarrow V(T) = E T^2$$

التباين لـ T^2

$$T = \frac{\sqrt{n} x}{\sqrt{x}} \Rightarrow T^2 = \frac{n x^2}{x} \Rightarrow$$

$$E T^2 = n E x^2 E \frac{1}{x} = n E \frac{1}{x} \Rightarrow E T^2 = V(T) = \frac{n}{n-2} \quad n > 2$$

لنوجد $E \frac{1}{x}$

$$E \frac{1}{x} = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^{\infty} \frac{1}{y} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}} dy$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^{\infty} y^{(\frac{n}{2}-1)-1} e^{-\frac{y}{2}} dy = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^{\infty} t^{(\frac{n}{2}-1)-1} e^{-\frac{t}{2}} dt$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^{\infty} t^{(\frac{n}{2}-1)-1} e^{-\frac{t}{2}} dt = \frac{1}{2 \Gamma(\frac{n}{2})} \Gamma(\frac{n}{2}-1)$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{n}{2}-1)}{2 \Gamma(\frac{n}{2})} = \frac{1}{n-2}$$

نشر $y = \frac{x}{2}$
 $dy = \frac{1}{2} dx$

مثال

إذا كان لدينا من نغمة ستودينت أي أن $T \sim T(8)$ نأخذ حبة

فأوجد التوقع والتباين مما هو المتوقع لـ $t(10)$ وأوجد $V(\sqrt{6} T)$

الحل

$$ET=0, \quad V(T)=\frac{n}{n-2} = \frac{8}{6}$$

$$E(10T) = 10ET = 10(0) = 0$$

$$V(\sqrt{6} T) = 6V(T) = 6 \cdot \frac{8}{6} = 8$$

ملاحظة: إذا كان لدينا متغير عشوائي X معلومة دالة الكثافة الاحتمالية $f(x)$ و Y متغير عشوائي تابع لـ X بحيث يكون لـ X قيمتين محتملتين عندئذ دالة الكثافة للمتغير Y سوف تقضى بالشكل

$$g_Y(y) = f(x_1) \left| \frac{dx_1}{dy} \right|_{x_1=u_1(y)} + f(x_2) \left| \frac{dx_2}{dy} \right|_{x_2=u_2(y)}$$

$$= \sum_{i=1}^2 f(x_i) \left| \frac{dx_i}{dy} \right|_{x_i=u_i(y)}$$

مثال: افترض X متغير عشوائي طبيعي صياري أي أن $X \sim N(0,1)$ ولتوجد التوزيع الاحتمالي للمتغير $Y = X^2$

الحل

$$g_Y(y) = f(x_1) \left| \frac{dx_1}{dy} \right|_{x_1=\sqrt{y}} + f(x_2) \left| \frac{dx_2}{dy} \right|_{x_2=-\sqrt{y}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \left| \frac{dx_1}{dy} \right|_{x_1=\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \left| \frac{dx_2}{dy} \right|_{x_2=-\sqrt{y}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} \frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} y^{-\frac{1}{2}}$$

وهي دالة الكثافة الاحتمالية لمتغير عشوائي Y كمنع لـ X مربع بدرجة حرية

$$Y \sim \chi^2(1)$$

مرهنة

نفرض X من بطن صياري مربع بدرجة حرية 1 ونفرض $Y = X^2$

X_1, X_2, \dots, X_n عينة عشوائية لـ X عندئذ:

$$\sum_{i=1}^n X_i \sim \chi^2(n)$$

البرهان: نعلم أن

$$M_{\sum_{i=1}^n X_i}(t) = (M_{X_1}(t))^n = \left[(1-2t)^{-\frac{1}{2}} \right]^n = (1-2t)^{-\frac{n}{2}}$$

وهي الدالة المولدة لكاي مربع بدرجة حرية n أي أن مجموع متغير عشوائي من توزيع كاي مربع n مرة واحد سوف نضع لتوزيع كاي مربع بدرجة حرية n .

نظرية المعاينة:

تعريف المجتمع الأحصاء: هو كل الأسياء أو الأفراد التي ندرسها في الدراسة وعادة يوصف كل مجتمع إحصائي باسم هذه التوزيع وإذا كان التوزيع توزيعاً منقطعاً دعونا المجتمع ~~بالمجتمع~~ المجتمع إحصائي منقطع ووسطاء التوزيع هو وسطاء المجتمع الإحصائي وإذا كان التوزيع المستمر عندئذٍ ندعو المجتمع الإحصائي بالمجتمع الإحصائي المستمر ووسطاء هذا المجتمع سوف تكون نفس التوزيع الاحتمالي.

م **علم سبيل المثال 1**

احتمالي

إذا كان لدينا مجتمع إحصائي موصوف بالتوزيع البواسوني وسيطه λ عندئذٍ ندعو هذا المجتمع بالمجتمع ~~بالمجتمع~~ المجتمع الإحصائي البواسوني بحيث λ يتخذ وسيط هذا المجتمع وسيلاً ما ينطبق على التوزيع البواسوني يتطلب على المجتمع أيضاً إذا كان لدينا مجتمعاً إحصائياً موصوفاً بتوزيع احتمالي طبيعي وسيطه الأول μ

وعلم هذا المثال يوجد مجتمعان إحصائيتان لعدد التوزيعات الاحتمالية التي مرت معنا

العينة العشوائية 1

هي جزء من المجتمع الإحصائي تأخذ باستقلالية وبغير اعتماد وعادة يرمز بعلامات البنية X_1, X_2, \dots, X_n وإذا كان حجم ~~المجتمع~~ العينة n و كان حجم المجتمع N محدد عندئذٍ $n \leq N$

ملاحظة 1

إذا كان لدينا مجتمعاً إحصائياً $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ وهذا يعني لدينا متغير